L'analisi non standard nell'opera di Maria Gaetana Agnesi

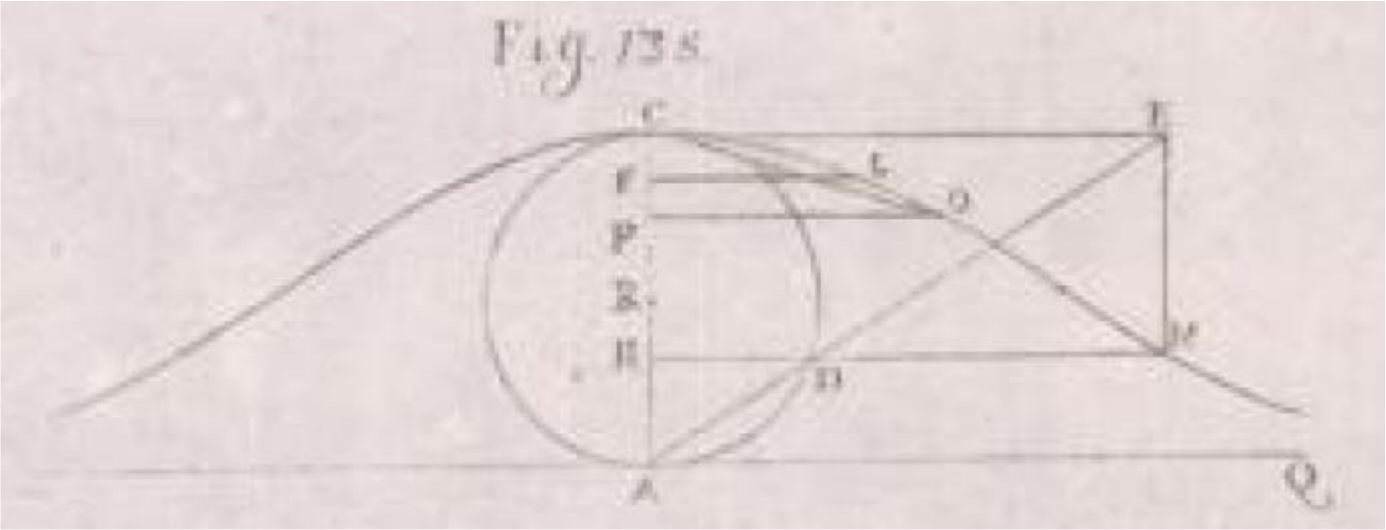


Immagine originale della versiera di Agnesi nel suo testo: ''Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana'' (1748)

Maria Gaetana Agnesi (1718-1799)

Dall’indice:

Tomo I

LIBRO PRIMO: *‘’Dell’Analisi delle Quantità finite’’*

Argomenti: elementi di algebra, risoluzione di equazioni e geometria analitica.

Tomo II

LIBRO SECONDO: ‘’Del Calcolo Differenziale ‘’

Argomenti: differenziali, massimi, minimi e flessi.

LIBRO TERZO: ‘’Del Calcolo Integrale’’

Argomenti: regole di integrazione.

LIBRO QUARTO: ‘’Del Metodo Inverso delle Tangenti ‘’

Argomenti: equazioni differenziali di primo e secondo ordine.

‘’Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana’’
Frontespizio del tomo II

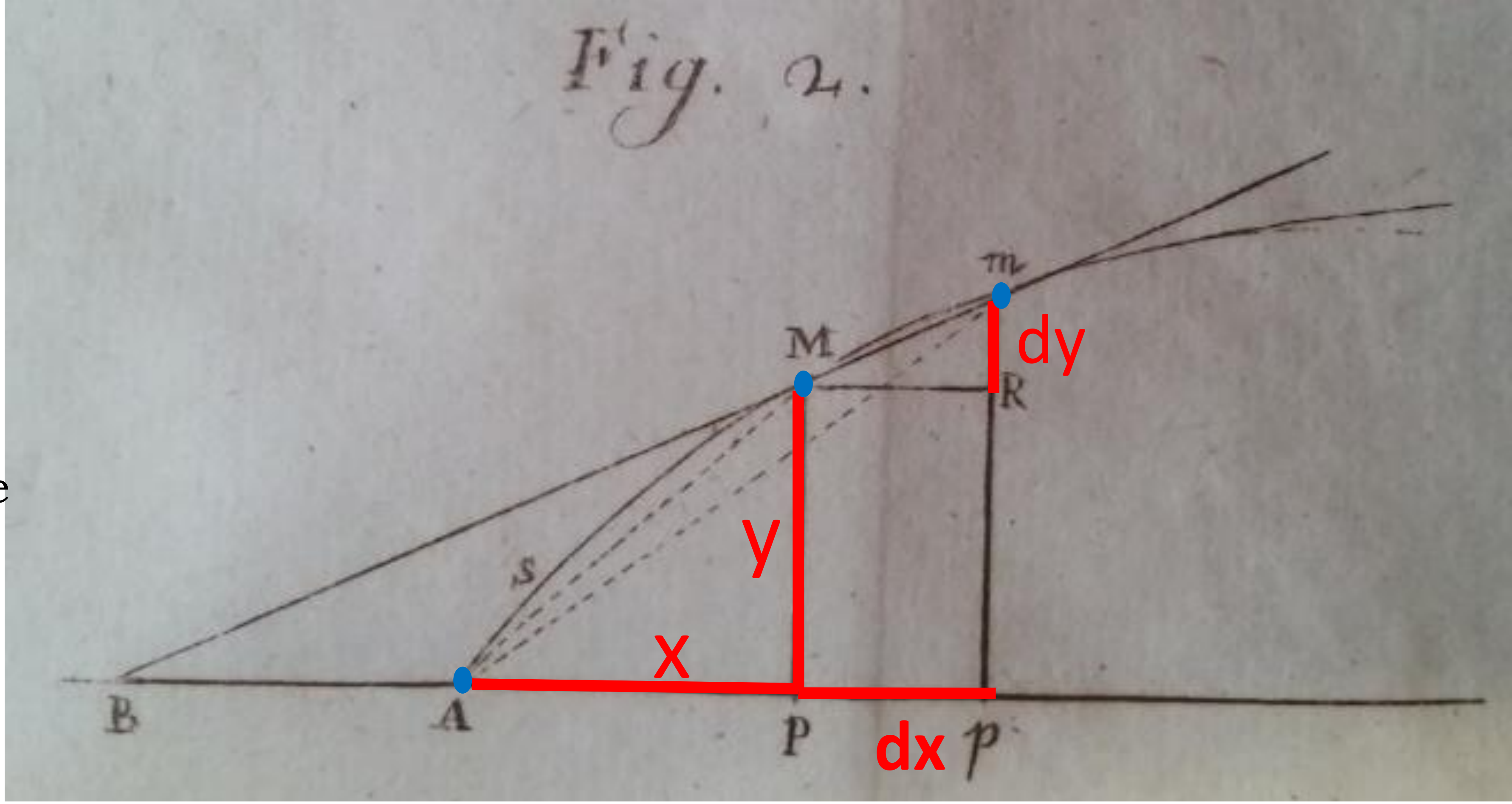
Le definizioni

’’Col nome di quantità variabili si vogliono significare quelle, che sono capaci di aumento, e di decremento, e si concepiscono come **fluenti**, e per così dire, generate da un moto continuo.”

’’Si chiama **differenza, o flussione** di una quantità variabile quella porzione infinitesìma, cioè tanto piccola, che ad essa variabile abbia proporzione minore di qualunque data, e per cui crescendo, o diminuendosi la medesima variabile, possa ciò non ostante assumersi per la stessa di prima.”

Le differenze

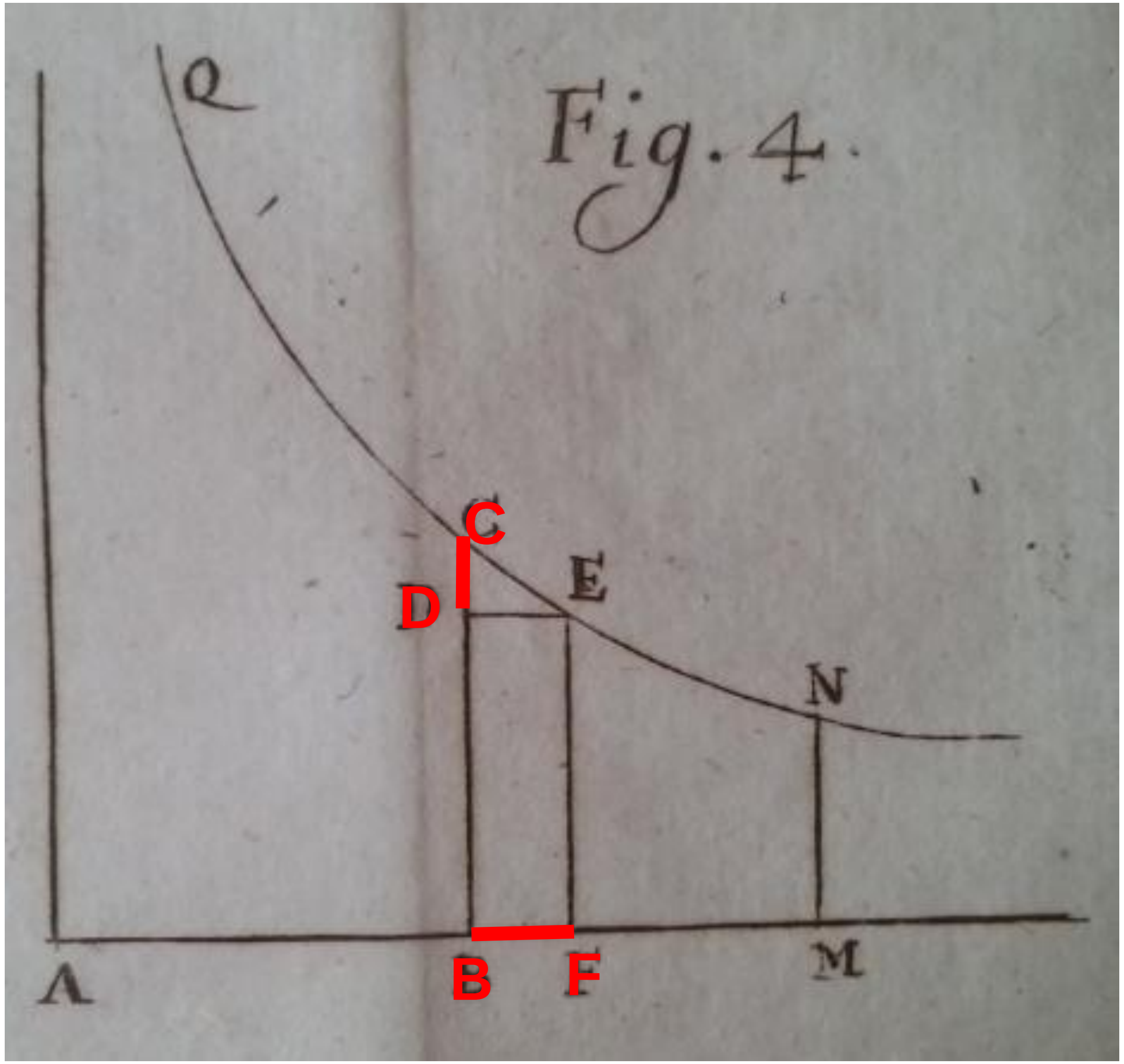
Si prenda la curva AM con P ascissa di M e si consideri "una porzione infinitesima Pp, sarà essa la differenza, o sia la flussione dell'ascissa AP, e si potranno considerare per eguali le due AP, Ap, non essendovi proporzione tra la quantità finita AP, e la porzione infinitesima Pp



"La Caratteristica, con cui soglionsi esprimere le differenze, è la lettera d, quindi posta l'ascissa AP = x, sarà Pp, o MR = dx; e similmente posta l'ordinata PM = y, sarà Rm = dy,"

Altrettanto si può dire per l'arco AM di cui Mm è una flussione e dell'area sottesa da AM, di cui quella sottesa da Mm è un flussione.

“**Che queste tali quantità differenziali non sieno vane immaginazioni**, oltre di che egli è manifesto dal metodo degl’Antichi de’ Poligoni inscritti, e circoscritti, **si può chiaramente vedere dal solo idearli**, che l’ordinata MN (Fig. 4.) si vada continuamente accostando alla BC, finché con essa coincida; ora egli è chiaro, che prima, che quelle due linee coincidano, averanno tra loro una distanza, ed una differenza inassegnabile, cioè minore di qualunque quantità data; in tale posizione sieno BC, FE, adunque **BF, CD saranno quantità minori di qualunque data**, e perciò inassegnabili, o sia differenze, o flussioni.”

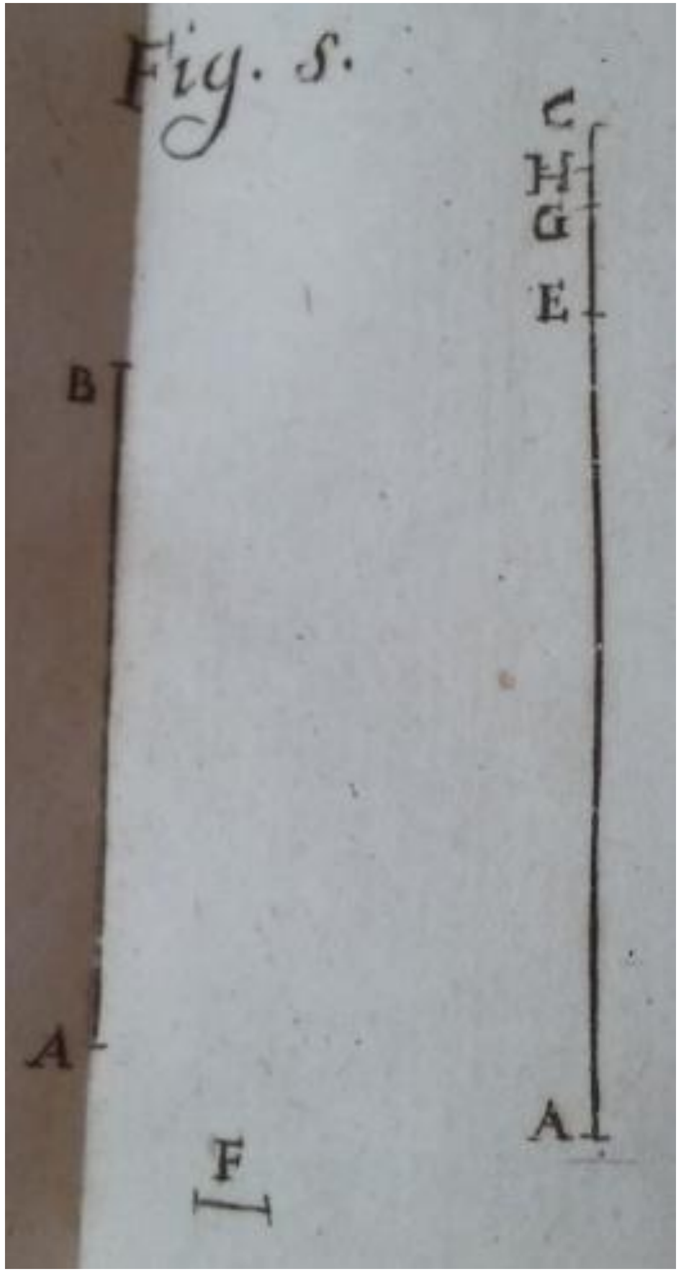


Inassegnabile: minore di qualsiasi quantità data;
minore cioè di 1/n per ogni n;

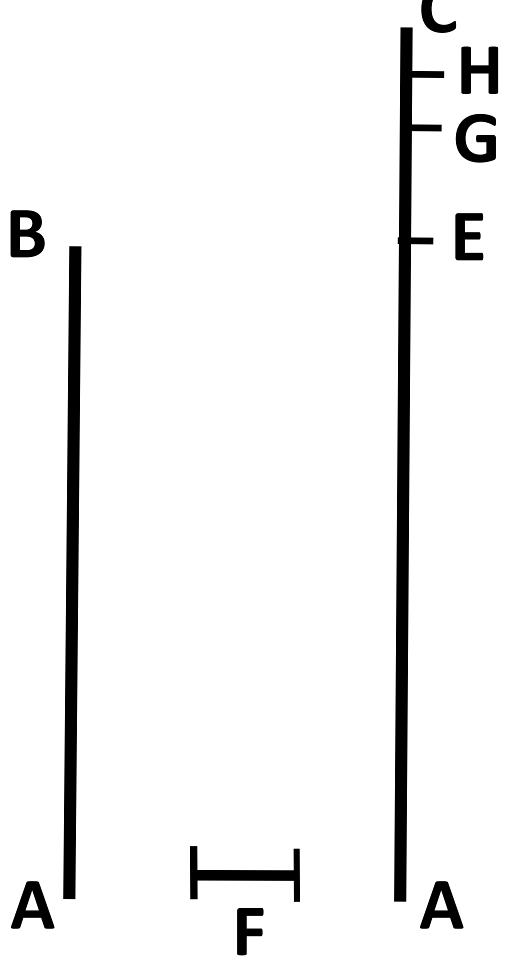
Incommensurabilità e infinitesimi

''Anzi con la sola comun Geometria è sicuro, che non solo queste [le differenze], ma altre quantità minime di classi infinite entrano realmente a formare l'estensione geometrica''

''Ed in fatti **sia** a cagion d'esempio (Fig. 5.) **AB il lato, ed AC il diametro d'un quadrato**, le quali due linee per l'ultima proposizione del libro 10 di Euclide sono fra loro asimmetre, vale a dire incommensurabili. **Dico per tanto: che non sono esse rese tali da una qual si sia finita lineetta CE, per quanto piccola essa si prenda, ma bensì da un'altra infinitamente minore, cioè della classe delle infinitesime**.''



Fingiamo che sia il segmento finito EC che rende incommensurabili AB e AC e che quindi la restante AE sia commensurabile a AB.



Consideriamo F unità di misura di entrambi AB e AE; tale F non può essere commensurabile ad EC altrimenti AB e AC sarebbero commensurabili, dovrà essere maggiore o minore di EC.

Se EC è maggiore di F, sottraendo la seconda dalla prima si ottiene GC: AB e AG saranno commensurabili, non era la grandezza finita EC che rendeva incommensurabili AB e AC

A rendere incommensurabili i due segmenti è allora la finita GC; possiamo ora trovare un sottomultiplo di F più piccolo di GC che sottratto a GC faccia restare HC, quantità finita che giustifichi l'incommensurabilità ma…

"**replicato il discorso**, non è quella che rende incommensurabili le linee AB, AC; ed atteso che il raziocinio vale per qual si sia grandezza finita, **si conchiuda, che la incommensurabilità procede da una quantità inassegnabile minore di qualunque data**"

Commenti

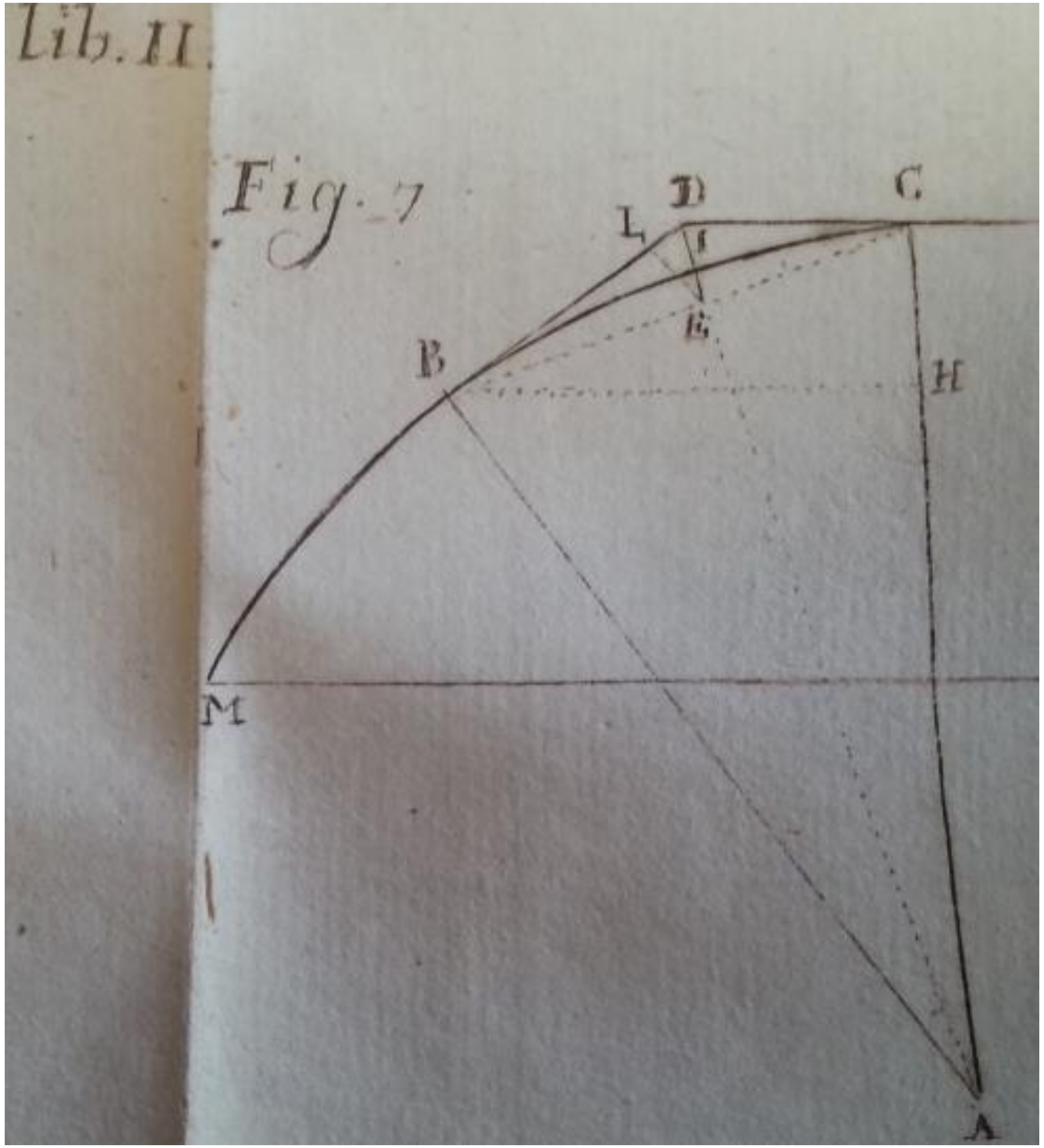
- Gli infinitesimi per l’Agnesi sono effettivi enti geometrici che contribuiscono all’estensione delle figure, rendendo anche ragione dell’incommensurabilità

- La causa dell’incommensurabilità non sono però gli infinitesimi altrimenti si confonderebbero gli infinitesimi veri e propri con gli irrazionali, sottoinsieme di R.

- Il procedimento della Agnesi, che cerca di rendere sempre più piccola la differenza che giustificherebbe l’incommensurabilità tra due segmenti, in realtà non risolve il problema; non si elimina infatti l’incommensurabilità tra i segmenti maggiori.

- Volendo dimostrare che le quantità infinitesime ‘’entrano realmente a formare l’estensione geometrica” esagera nel trovarli come giustificazione della più ‘’comun geometria” dando agli infinitesimi un significato ontologico, nel contesto dell’incommensurabilità, che non hanno.

L’arco infinitesimo di qualsivoglia curva ha le proprietà dell’arco di cerchio



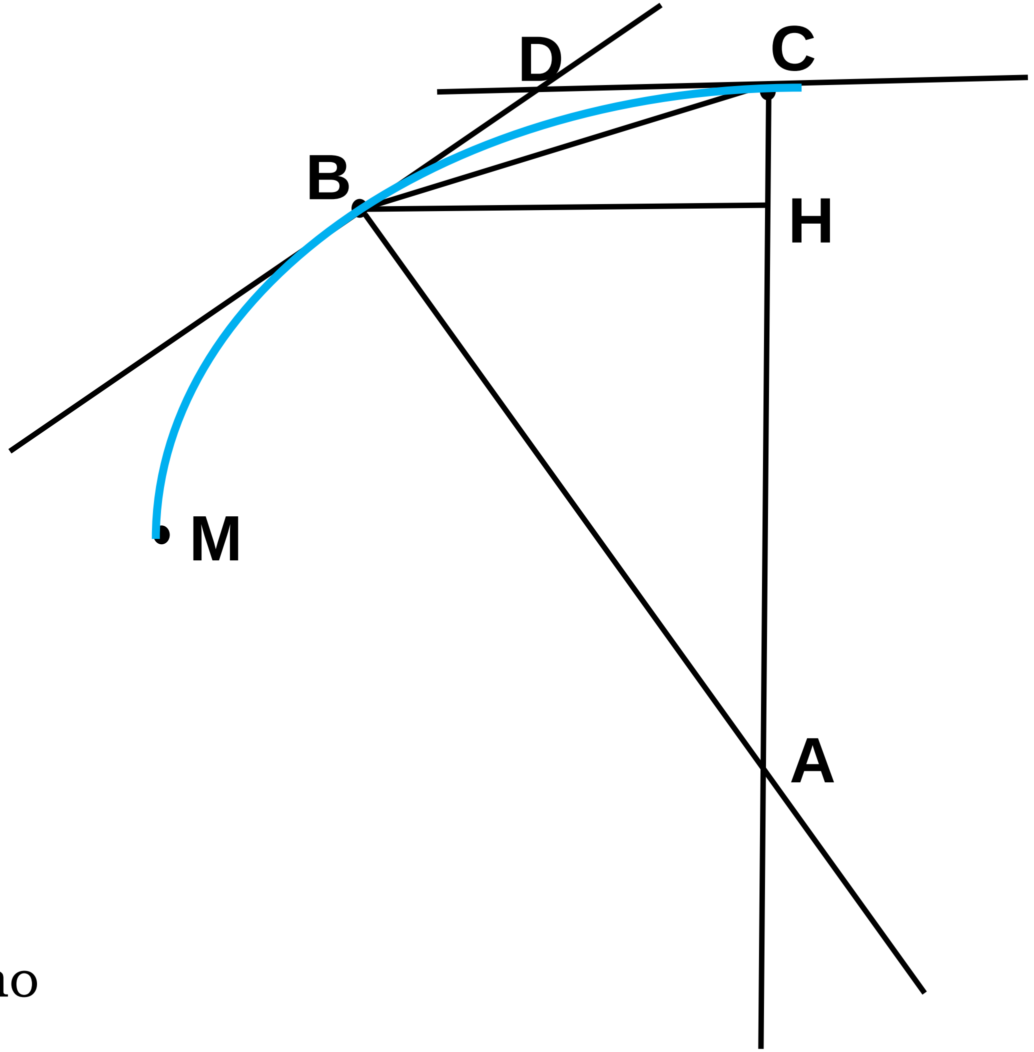
Teorema I

”Sia una qualunque curva MBC, (Fig. 7.) ed una porzione di essa BC infinitesima del primo ordine. Da’ punti B, C si conducano perpendicolari alla curva le rette BA, CA. Dico: che le rette BA, CA si potranno assumere per eguali”

Corollario IV

”Da ciò si raccoglie, che **un’arco qualunque infinitesimo BC di qualsivoglia curva avrà le stesse affezioni, e proprietà dell’arco di circolo** descritto col centro A, e raggio AB, o AC.”

Consideriamo la curva qualsiasi MBC e
una sua parte infinitesima BC del primo ordine.
Conduciamo le perpendicolari alla curva BA e CA,
che si incontrano in A, le tangenti BD e CD e
la corda BC.
Supponiamo che CA e BA siano diverse,
con CA maggiore e conduciamo la
perpendicolare BH a CA; la differenza
tra CA e BA sarà minore di CH e CH sarà
minore della corda BC, per l'angolo retto in H.
La corda BC, avendo supposto l'arco BC infinitesimo
del primo ordine, è anch'essa infinitesima del primo ordine.
Dunque la differenza tra BA e CA, non è maggiore di una
quantità infinitesima del primo ordine e
"BA, CA potranno assumersi per eguali".



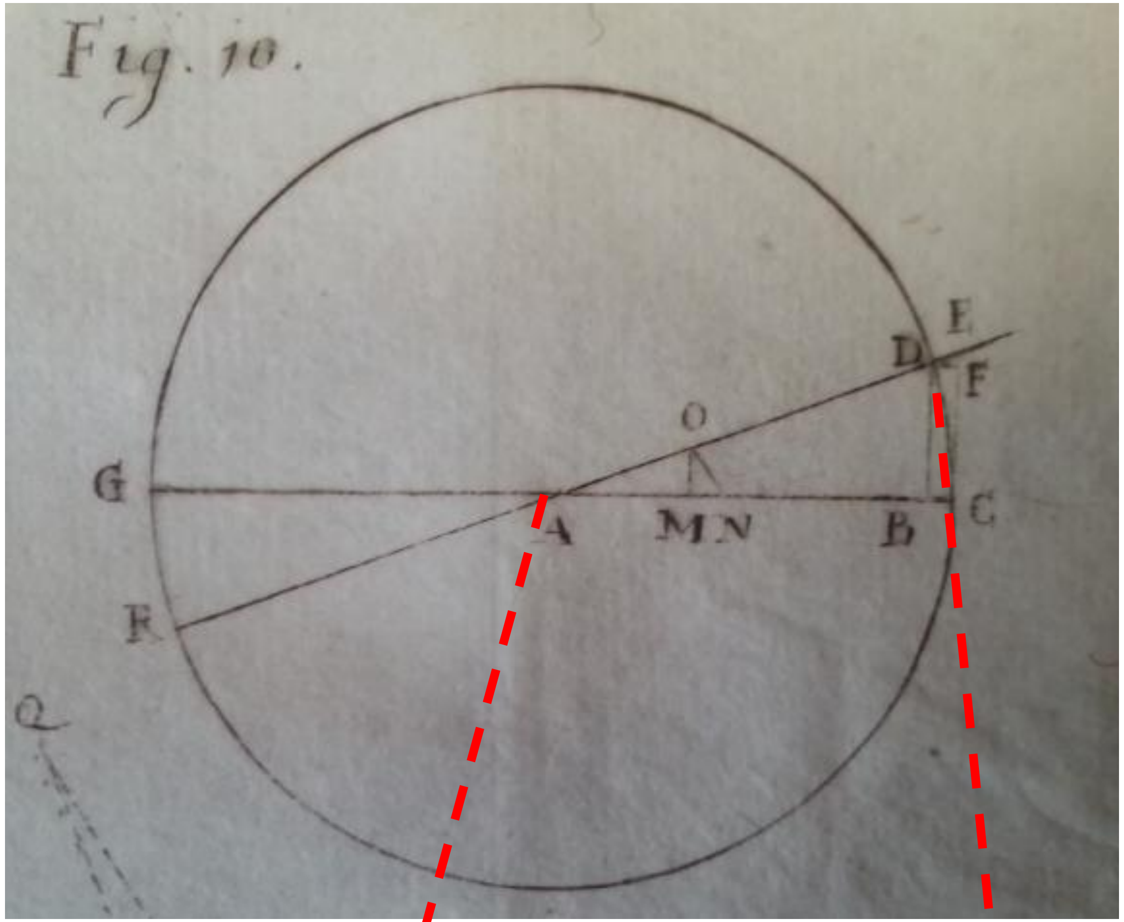
Infinitesimi del secondo e terzo ordine

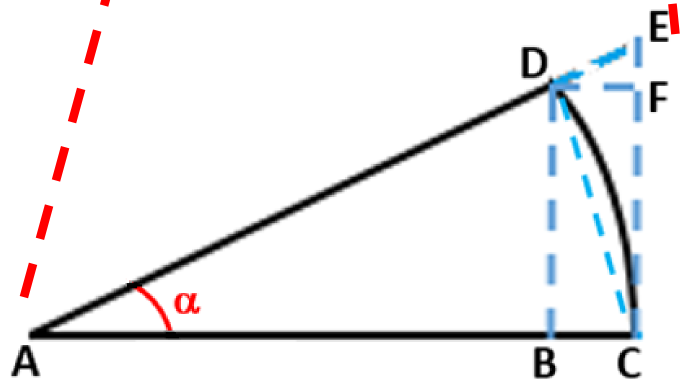
Teorema III

"Se nel circolo si prenda un' arco infinitesimo del primo ordine, dico che il seno verso sarà quantità infinitesima del secondo, e la differenza fra il seno retto e la tangente sarà infinitesima del terzo."

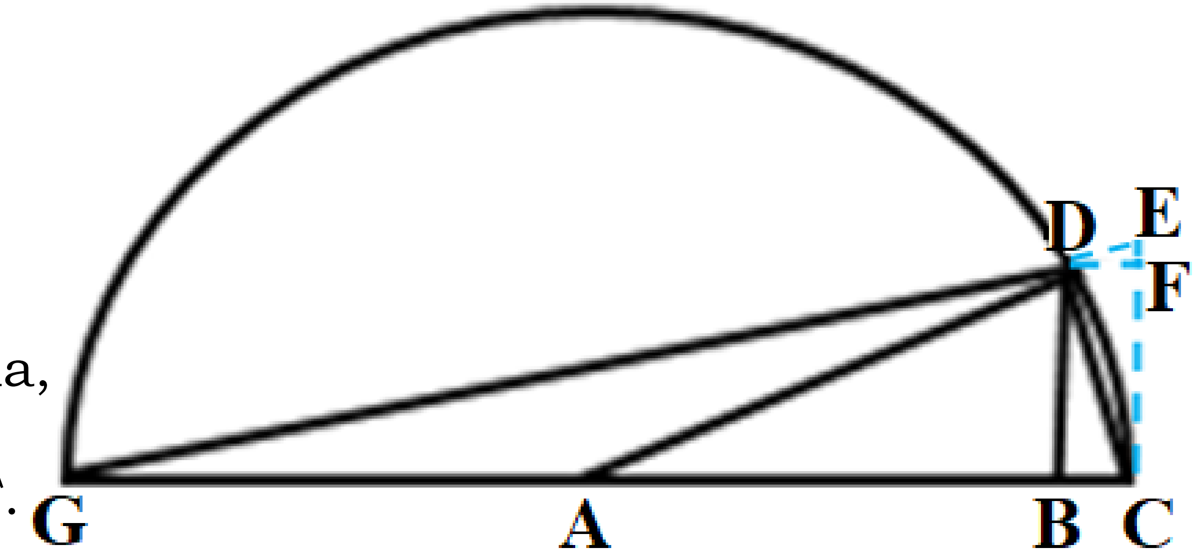
Corollario I

"poiché la tangente è sempre maggiore dell'arco, l'arco della corda, e la corda del seno retto; potendosi assumere per eguali la tangente, ed il seno retto, giacché non differiscono se non per una infinitesima del terzo, si potranno anche assumere per eguali la tangente, l'arco, la corda, ed il seno retto"

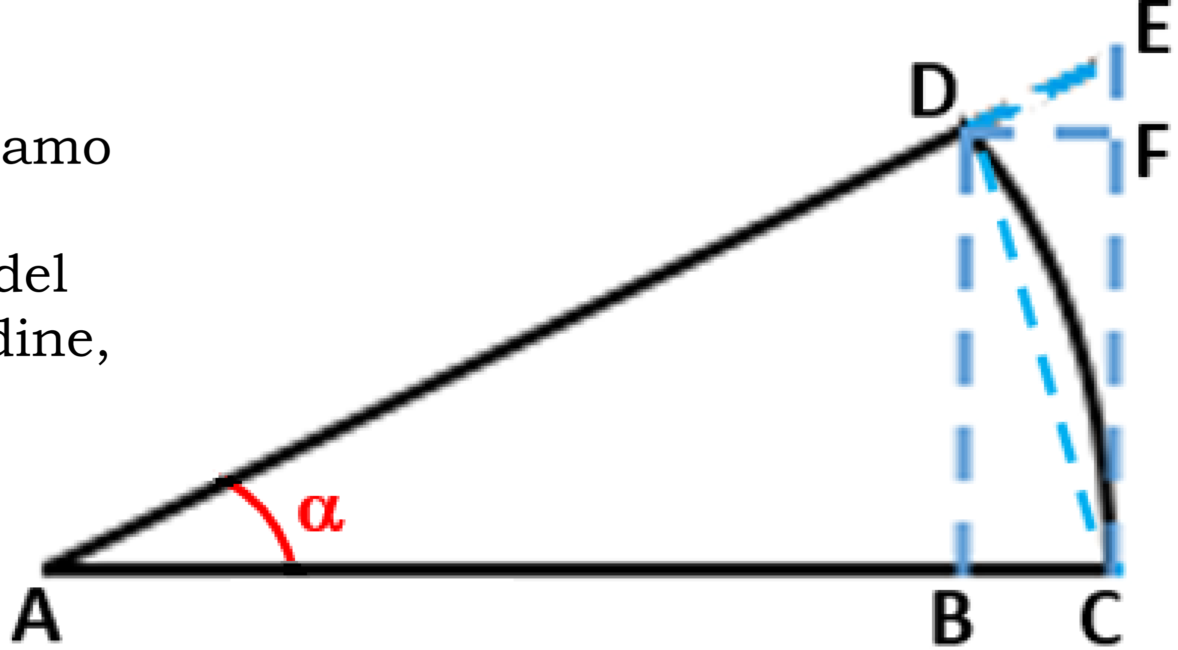




Sia DC arco infinitesimo del 1° ordine, DB il seno retto o seno e CE la tangente. Si conduca la parallela DF ad AC.



Per il secondo teorema di Euclide vale: GB:BD=BD:BC; poiché GB è quantità finita e BD, infinitesima del 1° ordine, come l'arco di cui è corda, così sarà BD infinitamente maggiore di BC, che quindi sarà un infinitesimo del 2° ordine, come DF. Ricordando che senoverso(α)=1-cosα=BC, abbiamo che il senoverso è una quantità infinitesima del 2° ordine.



Dalla similitudine dei triangoli ABD e DFE, otteniamo AB:BD=DF:FE; poiché AB è una quantità finita, infinitamente maggiore di BD, che è infinitesima del 1° ordine, così essendo DF infinitesima del 2° ordine, FE lo è di 3° ordine: FE, differenza fra seno e tangente, è flussione del 3° ordine.

Poiché tangente e seno differiscono per una quantità infinitesima del 3° ordine, possiamo assumere per uguali tangente, arco, corda e seno

Commenti

Nell'analisi standard abbiamo due limiti notevoli trigonometrici che riguardano il seno verso, meglio noto come 1-cosx

Senoverso di x = Sinv x = 1-cos x

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Se x tende a 0, il senoverso di x è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad x e il limite è 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Se x tende a 0, il senoverso di x è un infinitesimo dello stesso ordine rispetto a x^2 e il confronto tra infinitesimi ci dice che il limite del loro rapporto è un numero reale diverso da 0

Per quanto riguarda il fatto che "la differenza fra il seno retto e la tangente sarà infinitesima del terzo" basta ricordare gli sviluppi di Taylor-McLaurin:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots \qquad \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots\ldots$$

Il tutto coerente con quanto affermato e dimostrato dalla Agnesi.

Scolio II

‘’Per iscansare poi i paralogismi, nei quali pur troppo è facile incorrere, gioverà il riflettere, che **nelle linee infinitamente piccole di qualsivoglia ordine**, conforme si pratica anche nelle finite, **hanno a considerarsi** due importanti circostanze, cioè la loro **grandezza** e la loro **posizione**. E quanto alla grandezza non credo che mai si possa sbagliare, se non da coloro, che credono tali grandezze infinitesime un mero nulla.”

‘’Ora sebbene le quantità col diminuirsi all’infinito passano da genere a genere, **le proporzioni in qualunque ordine persistono le medesime**; e perché di tre linee della stessa classe può costituirsi un triangolo, si noti che minorandosi proporzionalmente i lati sino a far transito da un grado all’altro, **non si mutano gli angoli**, che sempre fra loro la stessa ragione conservano. In tali incontri **non è mai lecito prendere una linea per l’altra**, nè fingere eguaglianza, o adequazione …**Ma se due grandezze di qual si sia ordine differiranno per una grandezza, che rispetto a loro sia inassegnabile, sicuramente, e senza rischio alcuno d’errare, una si può prendere per l’altra**, nè v’è timore, che l’adequamento porti un minimo sconcerto.”

Commenti

- I segmenti infinitesimi vanno studiati nel loro opportuno contesto di una determinata situazione geometrica, a questo si riferisce l’Agnesi quando parla della loro posizione.

  L’altra caratteristica di tali segmenti è la grandezza e l’errore più grande che si può fare su di essa è considerarla nulla.

- Ciò che rende significativo lo studio con gli infinitesimi è che se consideriamo due figure simili, una fatta di grandezze finite e l’altra fatta di infinitesimi, pur essendo le grandezze di tipologia diversa, gli angoli non mutano e le proporzioni si mantengono.

  Grazie alla geometria possiamo muoverci dalle grandezze finite a quelle infinitesime e viceversa.

- Se due grandezze finite, come ad esempio due segmenti, differiscono per un infinitesimo è lecito confondere una con l’altra.

…maniere o regole di differenziare le formole

26. Che se la quantità proposta da differenziarsi sarà il prodotto di più variabili, come xy, mentre x diviene $x + dx$, la y diviene $y + dy$, ed xy diviene $xy + ydx + xdy + dxdy$, che è il prodotto di $x + dx$ in $y + dy$; da questo prodotto adunque sottratta la quantità proposta xy, rimane $ydx + xdy + dxdy$, ma $dxdy$ è quantità infinitamente minore di ciascheduna dell' altre due, le quali sono il rettangolo di una quantità finita in una infinitesima, e $dxdy$ è il rettangolo di due infinitesime, e però infinitamente minore, dunque esso rettangolo si potrà francamente trascurare, quindi la differenza di xy sarà $xdy + ydx$.

27. La formola da differenziarsi sia una frazione, per esempio, $\frac{x}{y}$. Si ponga $\frac{x}{y} = z$, sarà dunque $x = zy$, e però anche eguali le loro differenze, cioè $dx = zdy + ydz$, quindi $dz = \frac{dx - zdy}{y}$, ora $z = \frac{x}{y}$, sostituito pertanto questo valore in luogo di z, sarà $dz = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy} = \frac{ydx - xdy}{yy}$; ma se $z = \frac{x}{y}$, sarà dz il differenziale di $\frac{x}{y}$, dunque il differenziale di $\frac{x}{y}$ sarà $\frac{-xdy + ydx}{yy}$.

‘’**26**….**se la quantità proposta da differenziarsi sarà il prodotto di più variabili**, come xy, mentre x diviene x + dx, la y diviene y + dy, ed xy diviene xy + ydx + xdy + dxdy, che è il prodotto di x + dx in y + dy; da questo prodotto adunque sottratta la quantità proposta xy, rimane ydx + xdy + dxdy; ma dxdy è quantità infinitamente minore di ciascheduna dell’altre due, le quali sono il rettangolo di una quantità finita in una infinitesima, e dxdy è il rettangolo di due infinitesime, e perciò infinitamente minore, dunque esso rettangolo si potrà francamente trascurare, quindi la differenza di xy sarà xdy + ydx.”

‘’**27. La formula da differenziarsi sia una frazione, per esempio $\frac{x}{y}$.** Si ponga $\frac{x}{y}$= z, sarà dunque x = zy e perciò anche eguali le loro differenze, cioè dx = zdy + ydz, quindi $dz = \frac{dx-zdy}{y}$, ora $z = \frac{x}{y}$, sostituito pertanto questo valore in luogo di z, sarà $dz = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy} = \frac{ydx-xdy}{yy}$; ma se $z = \frac{x}{y}$, sarà dz il differenziale di $\frac{x}{y}$, dunque il differenziale di $\frac{x}{y}$ sarà $\frac{-xdy+ydx}{yy}$.”

Commenti

- Per la Agnesi il differenziale è la differenza infinitesimale (oggi diremmo incremento infinitesimo), come anche in Robinson, fatto che rende la trattazione naturale e conseguente.

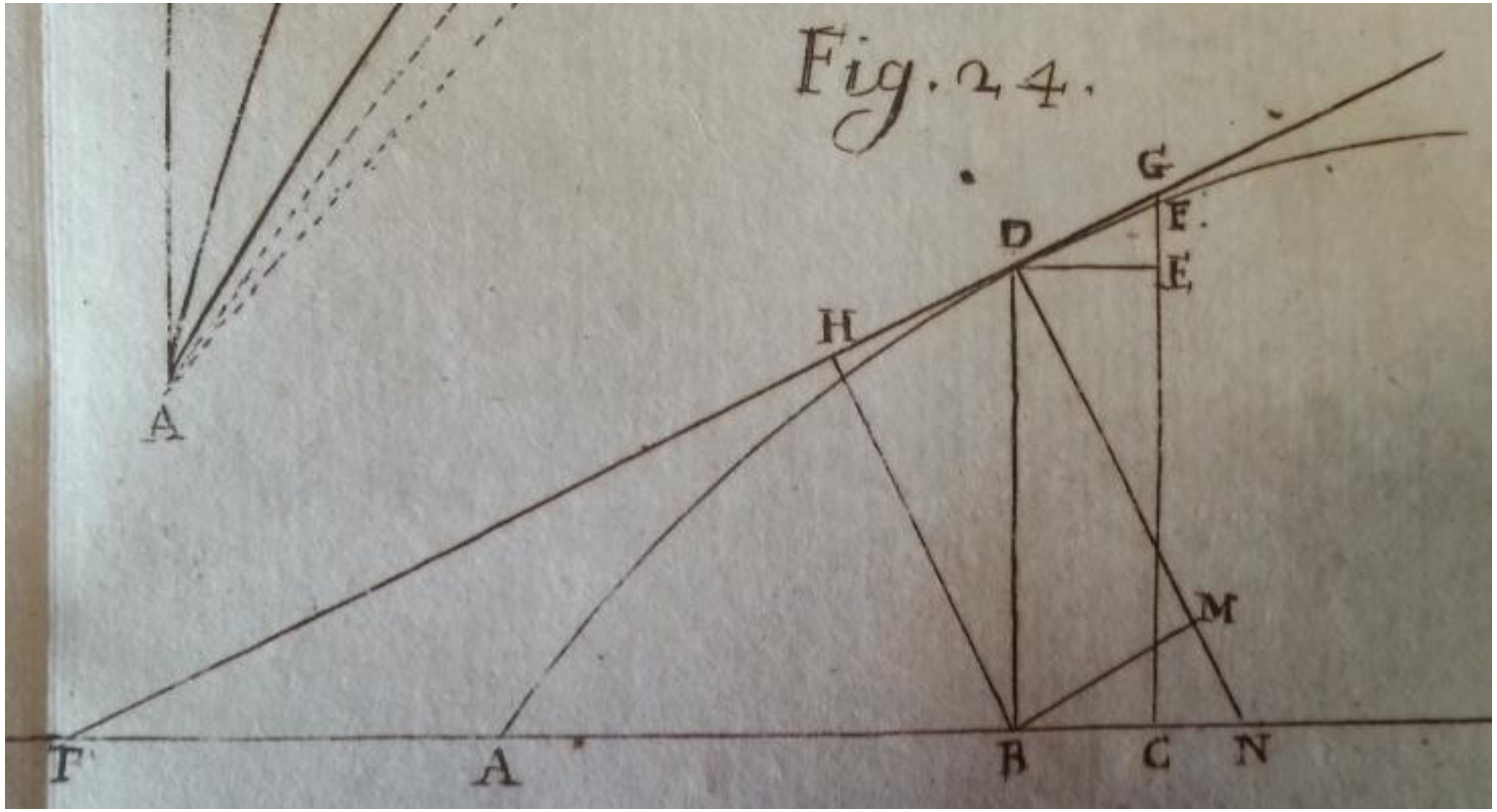
- Le regole di derivazione, con l'uso dei differenziali e della simbologia di Leibniz, diventano immediate ed evidenti anche per il lettore meno esperto.

- Le dimostrazioni delle formule, in particolare, risultano non laboriose, brevi e straordinariamente efficaci, potendo essere lette e comprese dall' appena citato lettore/studente non esperto o che per la prima volta si avvicina a questi concetti.

- Tutti i testi moderni di scuola secondaria, hanno bisogno di almeno tre pagine per giustificare tali formule e ritengono indispensabile introdurre la regola della derivata del quoziente facendola precedere dalla regola della derivata della funzione reciproca.

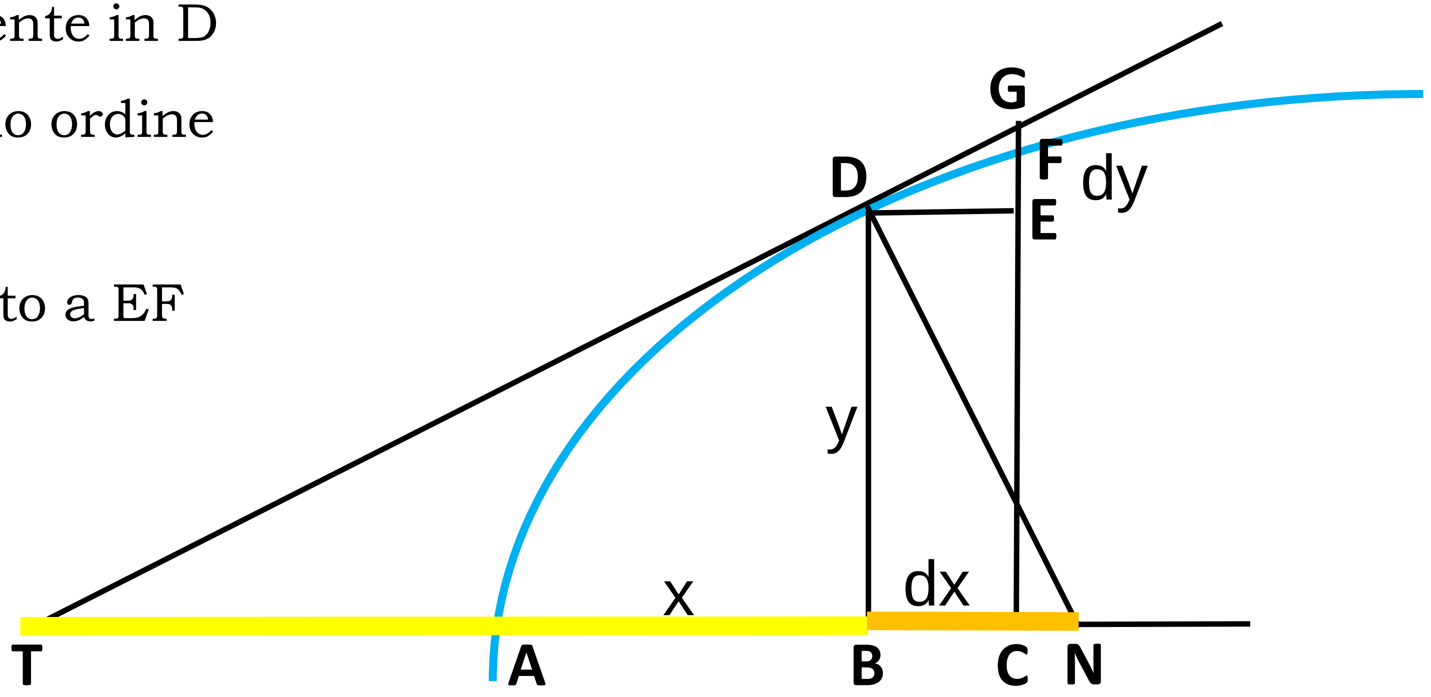
Quest'ultima introduzione vuole rendere più giustificato il quadrato che si trova al denominatore nella derivata del quoziente.

Sottotangente e sottonormale



Consideriamo la curva ADF,
la tangente in D, che interseca
l’asse X in T, e la normale in D,
che interseca l’asse X in N.
Essendo B la proiezione di D
sull’asse X, chiamiamo
il segmento TB sottotangente e il segmento BN sottonormale.
Ragionando sull’arco infinitesimo DF, vediamo come la Agnesi
determina la sottotangente e la sottonormale ad una curva,
procedimento poi generalizzabile a qualsiasi curva.

Consideriamo la curva ADF, la sua tangente in D
e l'arco di curva DF infinitesimo del primo ordine
rispetto alla curva.



Da quanto visto, GF è infinitesima rispetto a EF
così come la differenza fra DF e DG
è infinitesima rispetto all'arco DF.
Si possono allora "usurpare per eguali"
EF e EG, DF e DG. Si avrà quindi AB =x,

BD=y, EF=EG=dy, BC=DE=dx, DF=DG=$\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

I triangoli simili GED e DBT ci danno GE:ED=DB:BT, cioè dy : dx = y : BT

avremo quindi $\boldsymbol{BT} = \frac{\boldsymbol{ydx}}{\boldsymbol{dy}}$, **formula della sottotangente** per qualunque curva,
coerente con la moderna $y\text{-}y_0=f'(x_0)(x\text{-}x_0)$

aggiungendo la normale DN in D e ragionando sulla similitudine dei triangoli GDE e DBN,
dalla proporzione DE:EG=DB:BN(→dx:dy=y:BN), otteniamo **la sottonormale** $\boldsymbol{BN} = \frac{\boldsymbol{ydy}}{\boldsymbol{dx}}$

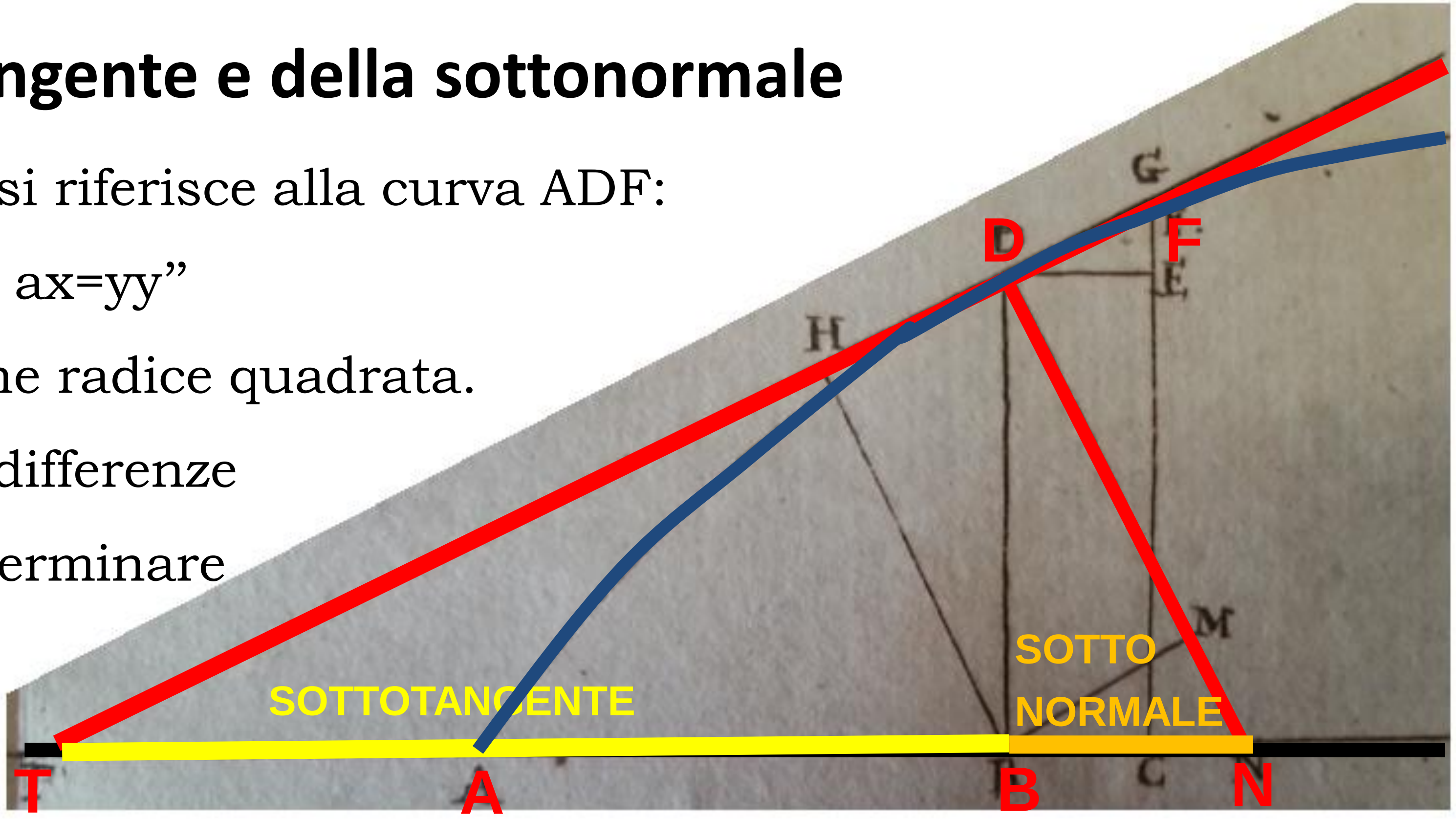
Esempio di calcolo della sottotangente e della sottonormale

Il primo esempio che propone l'Agnesi si riferisce alla curva ADF:

"la parabola apolliniana dell'equazione ax=yy"

Cioè, in linguaggio moderno, la funzione radice quadrata.

La trattazione, usando il metodo delle differenze è veloce e consente rapidamente di determinare la sottotangente e la sottonormale.



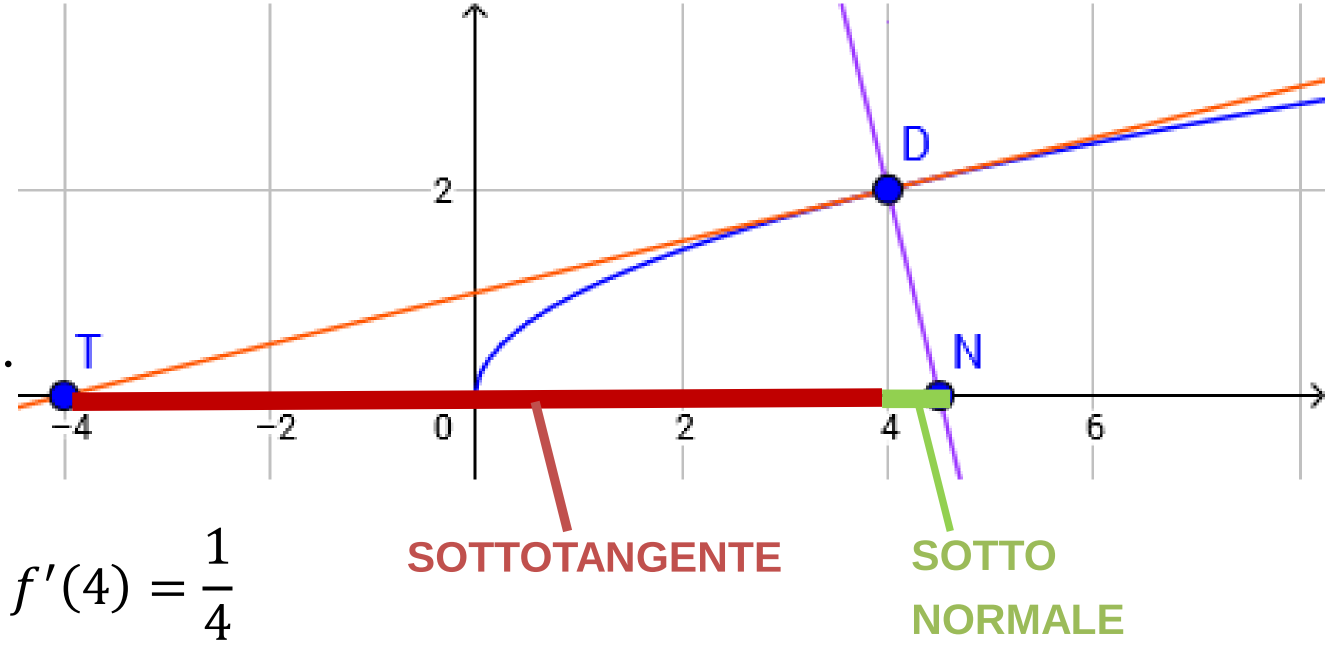
'Differenziando sarà adx = 2ydy, e dx = $\frac{2ydy}{a}$. Sostituito pertanto quel valore in luogo di dx nella formula generale della sottotangente $\frac{ydx}{dy}$, avremo $\frac{2yy}{a}$, oppure 2x, … **La sottotangente adunque nella parabola è doppia dell'ascissa**, e perciò … si prenda AT = AB"

"La formola generale della sottonormale è $\frac{ydy}{dx}$; ma per l'equazione della curva si ha $dx = \frac{2ydy}{a}$, dunque fatta la sostituzione, sarà la sottonormale nella parabola = $\frac{a}{2}$, cioè la metà del parametro"

Ritroviamo lo stesso risultato con i metodi tradizionali, analizzando la funzione

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Prendiamo in considerazione il punto D(4, 2). Determiniamo la tangente e la normale e le loro intersezioni con l'asse X.



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$$

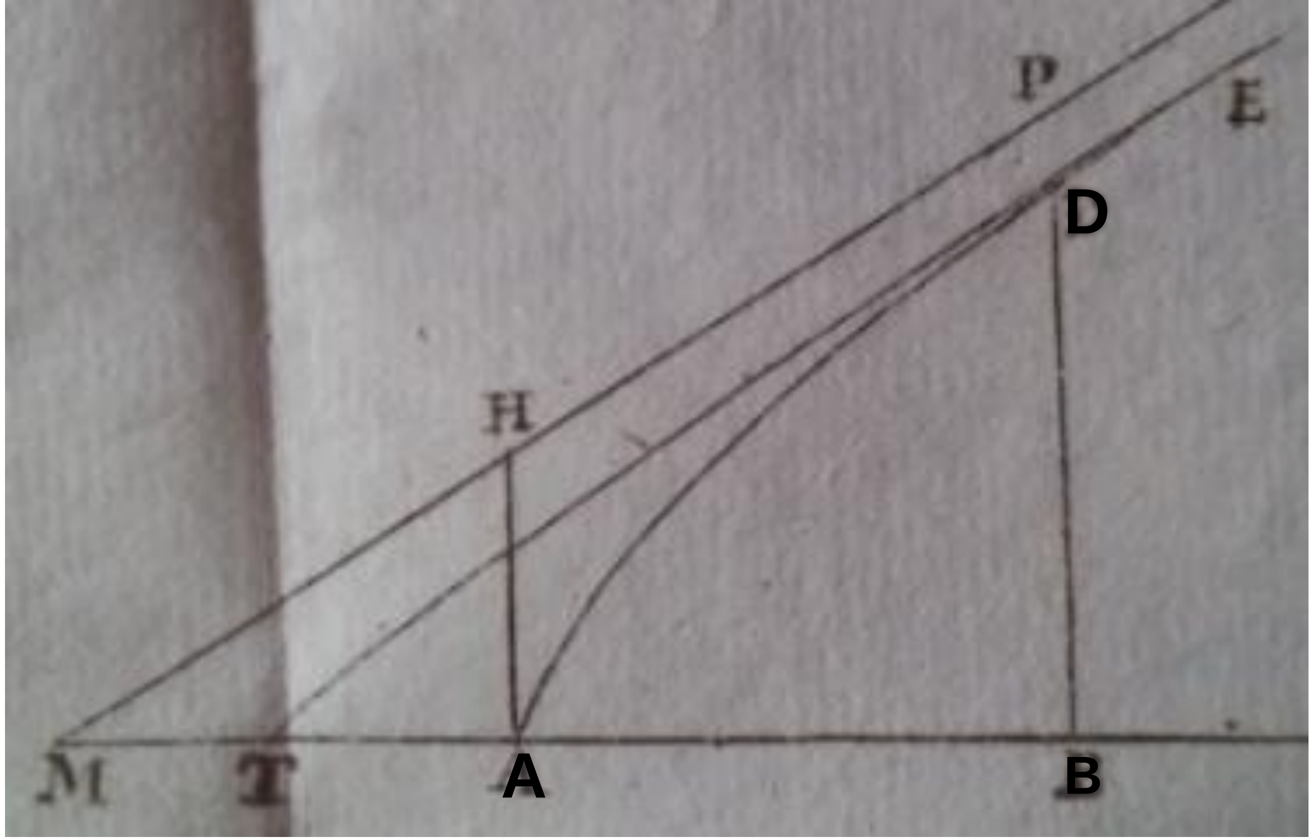
La tangente in D è: $y = \frac{1}{4}x - 1$

La normale in D è: $y = -4x + 18$

Le intersezioni, con l'asse X sono rispettivamente T(-4, 0) e N$\left(\frac{9}{2}, 0\right)$

L'Agnesi rende la determinazione delle distanze, nello studio delle tangenti e delle normali ad una curva, estremamente rapido ed efficace: con due formule di immediata applicazione si possono trovare, differenziando, le intersezioni con l'asse X della tangente e della normale ad una curva in un punto

Il metodo per la determinazione della sottotangente e della sottonormale, associate a tangente e normale, risulta fondamentale nel prosieguo del testo, per lo studio degli asintoti obliqui di una curva.



"è chiaro, che la tangente TD diverrà asintoto, quando toccando ella la curva in infinita distanza, cioè quando l'ascissa AB=x, essendo infinita, l'intercetta AT rimanga finita"

Lavori in corso…

- Il lavoro prosegue su:

https://bitbucket.org/zambu/agnesi

…dove si può trovare la traslitterazione,
con simboli alfabetici moderni, del primi 39 paragrafi
del secondo libro della Agnesi riguardante le differenze infinitesime

➢ mail di riferimento: brunostecca@libero.it
leonardo.aldegheri@tiscali.it
daniele.zambelli@gmail.com

- Il testo originale della Agnesi è scaricabile da Google, per superati limiti di copyright al link:

https://books.google.it/books?id=a7znPR4b4XkC&pg=PA122&dq=istituzioni+analitiche+ad+uso+della+giovent%C3%B9+italiana+agnesi+maria+gaetana&hl=it&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=istituzioni%20analitiche%20ad%20uso%20della%20giovent%C3%B9%20italiana%20agnesi%20maria%20gaetana&f=false

oppure:
→google libri
→Agnesi, Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana

Bibliografia

- M. G. Agnesi, *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, Regia-Ducal corte, Milano 1748;
- A. Robinson, *Analisi non standard*, Aracne, Roma 2013;
- F. Minonzio, *Chiarezza e metodo; l'indagine scientifica di Maria Gaetana Agnesi*, Lampi di Stampa, Milano 2006;
- G. Goldoni, *Il professor Apotema insegna… I numeri iperreali*, Modena 2017;
- G. Goldoni, *Il professor Apotema insegna… Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale*, Modena 2014.

Si ringrazia la Biblioteca alle Stimate di Verona, per

aver consentito la consultazione del testo originale.

Grazie

per

l’attenzione


INSTITUZIONI
ANALITICHE
AD USO
DELLA GIOVENTU' ITALIANA
DI D.NA MARIA GAETANA
A G N E S I
MILANESE
Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.
TOMO II.

IN MILANO, MDCCXLVIII.

NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

‘’Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana’’
Frontespizio del tomo II